Derivate parziali successive

Ordine di derivazione

Teorema 1 (Teorema di Schwarz). *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte su Ω. Se per una coppia di indici $1 \le i \le d$ e $1 \le j \le d$ le derivate parziali $\partial_{ij} u$ e $\partial_{ji} u$ sono continue nel punto $X_0 \in \Omega$, allora*

$$\partial_{ij} u(X_0) = \partial_{ji} u(X_0).$$

Dimostrazione in dimensione due. Supponiamo che $d = 2$ e $X_0 = (x, y)$.
Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y).$$

Fissati y e k, la funzione

$$f(t) = u(t, y+k) - u(t, y)$$

è derivabile in t ed esiste $h' \in (0, h)$ tale che

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= f(x+h) - f(x) \\ &= hf'(x+h') \\ &= h\Big(\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y)\Big). \end{aligned}$$

Utilizzando di nuovo il teorema di Lagrange, si ha

$$\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y) = k\,\partial_y \partial_x u(x+h', y+k'),$$

per un qualche $k' \in (0, k)$. Quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_y \partial_x u(x, y).$$

Ora, fissiamo x e k e consideriamo la funzione

$$g(s) = u(x+h, s) - u(x, s).$$

Ora, per ogni k, esiste $k'' \in (0, k)$ tale che

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= g(y+k) - g(y) \\ &= k\,g'(y+k'') \\ &= k\Big(\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'')\Big). \end{aligned}$$

Come sopra, esiste $h'' \in (0, h)$ tale che

$$\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'') = h\,\partial_x \partial_y u(x+h'', y+k''),$$

Quindi, per la continuità di $\partial_x \partial_y u$, si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_x \partial_y u(x, y).$$

$\square$

Sviluppo di Taylor al secondo ordine

Teorema 2 (Teorema di Taylor - ordine 2)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\Omega)$. Allora*

$$F(X)=F(X_0)+\sum_{i=1}^d \partial_i F(X_0)\big(X^i-X_0^i\big)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \partial_{ij}F(X_0)\big(X^i-X_0^i\big)\big(X^j-X_0^j\big)+o\big(|X-X_0|^2\big).$$

Dimostrazione in dimensione due. Useremo la notazione $X=(x,y)$ e $X_0=(x_0,y_0)$. Inoltre, senza perdità di generalità, possiamo supporre che $(x_0,y_0)=(0,0)$. Ora, siccome le funzioni

$$\partial_x F:\Omega\to\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \partial_y F:\Omega\to\mathbb{R}$$

sono di classe C^1, abbiamo

$$\begin{aligned}
\partial_x F(x,y)&=\partial_x F(0,0)+(x,y)\cdot\nabla(\partial_x F)(0,0)+\varepsilon_1(x,y),\\
\partial_y F(x,y)&=\partial_y F(0,0)+(x,y)\cdot\nabla(\partial_y F)(0,0)+\varepsilon_2(x,y),
\end{aligned}$$

dove

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{1}$$

Ora, fissiamo (x,y) in intorno di $(0,0)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
F(x,y)-F(0,0)&=\int_0^1 (x,y)\cdot\nabla F(sx,sy)\,ds\\
&=\int_0^1 x\,\partial_x F(sx,sy)\,ds+\int_0^1 y\,\partial_y F(sx,sy)\,ds\\
&=\int_0^1 x\Big(\partial_x F(0,0)+sx\partial_{xx}F(0,0)+sy\partial_{yx}F(0,0)+\varepsilon_1(sx,sy)\Big)\,ds\\
&\quad+\int_0^1 y\Big(\partial_y F(0,0)+sx\partial_{xy}F(0,0)+sy\partial_{yy}F(0,0)+\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds\\
&=(x,y)\cdot\nabla F(0,0)+\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}\partial_{xx}F(0,0) & \partial_{yx}F(0,0)\\ \partial_{xy}F(0,0) & \partial_{yy}F(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\
&\quad+\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds.
\end{aligned}$$

Quindi basta verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds=0.$$

Usando (1) abbiamo che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che:

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\varepsilon_j(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}<\varepsilon.$$

Di conseguenza, per $j=1,2$ e per ogni $s>0$, abbiamo

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\varepsilon_j(sx,sy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{s\,\varepsilon_j(sx,sy)}{\sqrt{(sx)^2+(sy)^2}}<s\varepsilon.$$

Quindi, per $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, si ha che

$$\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds<\varepsilon,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Massimi e minimi relativi

Definizione 3 (Massimi e minimi relativi). *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione.*

- *Diciamo che $X_0\in\Omega$ è un punto di* MINIMO RELATIVO *di F in Ω, se esiste $B_r(X_0)$ tale che*
$$F(X_0)\le F(X)\qquad \textit{per ogni}\qquad X\in B_r(X_0)\cap\Omega\,.$$
Se invece esiste $r>0$ tale che
$$F(X_0)< F(X)\qquad \textit{per ogni}\qquad X\in B_r(X_0)\cap\Omega\,,\ X\neq X_0\,,$$
diremo che X_0 è un MINIMO RELATIVO STRETTO.
- *Diciamo che $X_0\in\Omega$ è un punto di* MASSIMO RELATIVO *di F in Ω, se esiste $B_r(X_0)$ tale che*
$$F(X_0)\ge F(X)\qquad \textit{per ogni}\qquad X\in B_r(X_0)\cap\Omega\,.$$
Se invece esiste $r>0$ tale che
$$F(X_0)> F(X)\qquad \textit{per ogni}\qquad X\in B_r(X_0)\cap\Omega\,,\ X\neq X_0\,,$$
diremo che X_0 è un MASSIMO RELATIVO STRETTO.

Definizione 4 (Punti critici e punti di sella). *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su Ω. Diciamo che un punto $X_0\in\Omega$ è un* PUNTO CRITICO *per F se $\nabla F(X_0)=0$. Inoltre, se $X_0\in\Omega$ è un punto critico, ma non è un punto né di massimo né di minimo relativo, allora diremo che X_0 è un* PUNTO DI SELLA.

Condizioni necessarie per l'esistenza di massimi e minimi relativi

Teorema 5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω.*
Se F ha un minimo relativo nel punto $X_0\in\Omega$, allora
$$\nabla F(X_0)=0\qquad e\qquad \nabla^2F(X_0)\ge 0.$$
Se invece F ha un massimo relativo in X_0, allora
$$\nabla F(X_0)=0\qquad e\qquad \nabla^2F(X_0)\le 0.$$

Dimostrazione. Per ogni vettore $X\in\mathbb{R}$ consideriamo la funzione $t\mapsto F(X_0+tX)$. Se F ha un minimo relativo in X_0, allora la funzione (di una variabile reale) $t\mapsto F(X_0+tX)$ ha un minimo relativo in $t=0$. Di conseguenza,
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(X_0+tX)=0\qquad \text{e}\qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}F(X_0+tX)\ge 0,$$
ovvero
$$X\cdot\nabla F(X_0)=0\qquad \text{e}\qquad X\cdot\nabla^2F(X_0)X\ge 0.$$
Siccome il vettore X è arbitrario abbiamo che
$$X\cdot\nabla^2F(X_0)X\ge 0\qquad \text{per ogni}\qquad X\in\mathbb{R}^d.$$
Di conseguenza, la matrice hessiana $\nabla^2F(X_0)$ è semi-definita positiva. Infine, scegliendo $X=\nabla F(X_0)$ nella condizione al primo ordine
$$X\cdot\nabla F(X_0)=0,$$
otteniamo che
$$|\nabla F(X_0)|^2=0,$$
ovvero che X_0 è un punto critico per F. $\square$

Condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi e minimi relativi

Teorema 6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω.*

- *Se il punto $X_0 \in \Omega$ è tale che*

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla^2 F(X_0) > 0,$$

allora $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ha un punto di minimo relativo in X_0.

- *Se invece il punto $X_0 \in \Omega$ è tale che*

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla^2 F(X_0) < 0,$$

allora $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ha un punto di massimo relativo in X_0.

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 F(X_0) > 0.$$

Definiamo

$$M = \min_{\nu \in \partial B_1} \big\{\nu \cdot \nabla^2 F(X_0)\nu\big\}.$$

Siccome il minimo è realizzato in un vettore ν_{min}, abbiamo che $M > 0$. Di conseguenza

$$X \cdot \nabla^2 F(X_0) X \geq M|X|^2 \qquad \text{per ogni} \qquad X \in \mathbb{R}^d.$$

Ora, per il Teorema di Taylor, esiste una funzione $\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(X + X_0) = F(X_0) + \frac{1}{2} X \cdot \nabla^2 F(X_0) X + \varepsilon(X) \qquad \text{dove} \qquad \lim_{X \to 0} \frac{\varepsilon(X)}{|X|^2} = 0.$$

Di conseguenza,

$$F(X + X_0) - F(X_0) \geq |X|^2 \left(\frac{M}{2} + \frac{\varepsilon(X)}{|X|^2}\right) \geq 0,$$

per $|X|$ abbastanza piccolo. □

Condizioni sufficienti per l'esistenza di punti di sella

Teorema 7. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω.*
Se il punto $X_0 \in \Omega$ è un punto critico (ovvero $\nabla F(X_0) = 0$) e la matrice $\nabla^2 F(X_0)$ è indefinita, allora $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ha un punto di sella in X_0.

Dimostrazione. Siccome $\nabla^2 F(X_0)$ non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa, esistono due autovettori (non-nulli) $V \in \mathbb{R}^d$ e $v \in \mathbb{R}^d$ di $\nabla^2 F(X_0)$ tali che

$$V \cdot \nabla^2 F(X_0) V > 0 \qquad \text{e} \qquad v \cdot \nabla^2 F(X_0) v < 0.$$

Di conseguenza, la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + tV)$$

ha un minimo relativo stretto in $t = 0$, mentre la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + tv)$$

ha un massimo relativo stretto in $t = 0$. X_0 è quindi un punto di sella. □

Teorema 8. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω e $X_0 \in \Omega$. Se*

$$\nabla F(X_0) \qquad e \qquad \det\big(\nabla^2 F(X_0)\big) < 0,$$

allora X_0 è un punto di sella per F.

Dimostrazione. Siano λ_1 e λ_2 i due autovalori (eventualmente uguali) della matrice simmetrica $\nabla^2 F(X_0)$. Siccome

$$\det\big(\nabla^2 F(X_0)\big) = \lambda_1\lambda_2 < 0,$$

otteniamo che la matrice $\nabla^2 F(X_0)$ è indefinita. Applicando il teorema precedente, abbiamo la tesi. $\square$

Osservazione 9. *Il teorema precedente non vale nelle dimensioni dispari.*
Per esempio, se n è dispari, allora la funzione

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad F(X) = -|X|^2,$$

ha determinante negativo è un massimo globale in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 10. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω e $X_0 \in \Omega$. Dimostrare che se n è pari,*

$$\nabla F(X_0) \qquad e \qquad \det\big(\nabla^2 F(X_0)\big) < 0,$$

allora X_0 è un punto di sella per F.

Esempi

Possiamo riassumere i risultati delle sezioni precedenti come segue.
Supponiamo che Ω sia aperto, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ sia una funzione di classe C^2 e $X_0 \in \Omega$ sia un punto critico per F (ovvero $\nabla F(X_0) = 0$). Allora:

- se $\nabla^2 F(X_0)$ è definita positiva, allora F ha un punto di minimo relativo in X_0;
- se $\nabla^2 F(X_0)$ è definita negativa, allora F ha un punto di massimo relativo in X_0;
- se $\nabla^2 F(X_0)$ è indefinta, allora F ha un punto di sella in X_0.

Se invece $\nabla^2 F(X_0)$ è solo semi-definita positiva o semi-definita negativa, l'analisi al secondo ordine non è sufficiente per determinare il comportamento locale di F in un intorno di X_0.

Esempio 11. *La funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = x^4 + y^4$$

ha matrice hessiana nulla in $(0,0)$, e $(0,0)$ è un punto di minimo per F.

Esempio 12. *La funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = -x^4 - y^4$$

ha matrice hessiana nulla in $(0,0)$, e $(0,0)$ è un punto di massimo per F.

Esempio 13. *La funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = x^4 - y^4$$

ha matrice hessiana nulla in $(0,0)$, e $(0,0)$ è un punto di sella per F.

Proprietà delle matrici hessiane in $\mathbb{R}^2$

Simmetria

Dati un aperto Ω in $\mathbb{R}^2$ e una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω, la matrice hessiana $\nabla^2 F$ è data da

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}$$

Osserviamo che siccome le derivate parziali seconde di F sono continue (per definizione di $C^2(\Omega)$), il teorema di Schwarz implica che

$$\partial_{xy}F = \partial_{yx}F \qquad \text{su} \qquad \Omega.$$

Quindi, abbiamo ottenuto che:

> se $F \in C^2(\Omega)$, allora la matrice $\nabla^2 F$ è simmetrica.

Analisi delle matrici hessiane

In ogni punto $X_0 = (x_0, y_0)$ la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ può essere:

- *definita positiva;*
- *definita negativa;*
- *semi-definita positiva, ma non definita positiva;*
- *semi-definita negativa, ma non definita negativa;*
- *indefinita* (ovvero né semi-definita positiva, né semi-definita negativa).

Osserviamo che:

> in generale, per determinare il segno della matrice $\nabla^2 F$ in un punto (x_0, y_0) non basta studiare il segno delle derivate parziali $\partial_x^2 F$ e $\partial_y^2 F$ in (x_0, y_0).

Esempio 14. *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy.$$

In ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *possiamo calcolare*

$$\partial_{xx}F = 2 \qquad e \qquad \partial_{yy}F = 2.$$

Entrambe le derivate parziali sono strettamente positive, ma la matrice hessiana $\nabla^2 F$ *non è definita positiva. Infatti, l'origine* $(0, 0)$ *non è un punto di minimo locale. Per esempio, la funzione*

$$t \mapsto F(t, -t) = -2t^2 \qquad per \qquad t \in \mathbb{R}$$

ha un punto di massimo stretto in $t = 0$.

Esercizio 15. *Supponiamo che la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

NON *abbia un minimo locale in* $(0, 0)$.

- *È vero che la matrice hessiana $\nabla^2 F(0,0)$ non può essere definita positiva?*
- *È vero che la matrice hessiana $\nabla^2 F(0,0)$ non può essere semi-definita positiva?*

Esempio 16. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Se*

$$\partial_{xx} F(0,0) > 0 \qquad e \qquad \partial_{yy} F(0,0) < 0,$$

allora la matrice hessiana $\nabla^2 F$ è indefinita in $(0,0)$. Infatti, definendo i vettori

$$E_1 = (1,0) \qquad e \qquad E_2 = (0,1),$$

abbiamo che

$$E_1 \cdot \nabla^2 F(0,0) E_1 = \partial_{xx} F(0,0) > 0 \qquad e \qquad E_1 \cdot \nabla^2 F(0,0) E_1 = \partial_{yy} F(0,0) < 0.$$

Di conseguenza, $\nabla^2 F(0,0)$ è indefinita.

Lemma. Data una matrice reale simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

definiamo la forma quadratica associata $Q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Q_A(x,y) := \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ .$$

Allora, si ha:

(1) $\det A > 0$ se e solo se

$$\begin{gathered} Q_A \textit{ non cambia segno e non ha zeri su } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \textit{ ovvero} \\ Q_A(x,y) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ \textit{oppure} \\ Q_A(x,y) < 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \neq (0,0). \end{gathered}$$

(2) $\det A < 0$ se e solo se

$$\begin{gathered} Q_A \textit{ cambia segno su } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \textit{ ovvero} \\ \textit{esistono } (x_+, y_+) \textit{ e } (x_-, y_-) \textit{ tali che} \quad Q_A(x_+, y_+) > 0 \quad e \quad Q_A(x_-, y_-) < 0. \end{gathered}$$

(3) Se $\det A = 0$ se e solo se

$$Q_A \textit{ non cambia segno, ma si annulla su } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Di conseguenza, abbiamo il seguente teorema.

Teorema. *Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matrice reale simmetrica 2×2. Allora,*

(1) *A è semi-definita positiva* $\Leftrightarrow$ $a \geq 0$, $c \geq 0$, $\det A \geq 0$.

(2) *A è definita positiva* $\Leftrightarrow$ $a > 0$, $c > 0$, $\det A > 0$.

(3) *A è semi-definita negativa* $\Leftrightarrow$ $a \leq 0$, $c \leq 0$, $\det A \geq 0$.

(4) *A è definita negativa* $\Leftrightarrow$ $a < 0$, $c < 0$, $\det A > 0$.

(5) *A è indefinita* $\Leftrightarrow$ $\det A < 0$.

Esercizi

Esercizio 17. *Per ciascuna delle funzioni $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

- *determinare i punti critici di F;*
- *in ciascuno dei punti critici di F dire se la matrice hessiana $\nabla^2 F$ è:*
  - *definita positiva;*
  - *semi-definita positiva, ma non definita positiva;*
  - *definita negativa;*
  - *semi-definita negativa, ma non definita negativa;*
  - *indefinita.*
- *determinare:*
  - *i minimi relativi di F;*
  - *i massimi relativi di F;*
  - *i punti di sella di F.*

(1) $F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y$

(2) $F(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy + 20x$

(3) $F(x, y) = x^2 - y^2 + xy + 20x + 5y + 3$

(4) $F(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5xy + 20x + 5y + 3$

(5) $F(x, y) = x^2 + 3y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$

(6) $F(x, y) = 2x^2 + y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$

(7) $F(x, y) = -2x^2 - y^2 + 2xy + 20x + 5y + 3$

(8) $F(x, y) = e^{xy+y^2}$.

Dagli appelli precedenti

Esercizio 18 (Gennaio 2021 - versione 1)**.** *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x, y) = ye^{2x} - \frac{8y}{e^x} + y^3$$

La funzione F ha un unico punto critico in $\mathbb{R}^2$ che chiameremo $A_0 = (x_0, y_0)$.

(a) *Trovare le coordinate di A_0.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $\nabla^2 F$ di F in A_0.*

(c) *Dire se $\nabla^2 F(A_0)$ è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto A_0?*

Esercizio 19 (Gennaio 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^2y + xy - y^2x$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1, 0),\ (-1, 0),\ (\tfrac{1}{2}, 0),\ (2, 0),\ (-2, 0)\ e\ (-\tfrac{1}{2}, 0).$$

Trovare (x_0, y_0) *e dire quali fra le affermazioni seguenti sono vere.*

(a) *Trovare le coordinate di* A_0.

(b) *Calcolare la matrice Hessiana* $\nabla^2 F$ *di* F *in* A_0.

(c) *Dire se* $\nabla^2 F(A_0)$ *è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto* A_0*?*

Esercizio 20 (Febbraio 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^3 - \frac{1}{3}y^3 + xy - x^2$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1, 1),\ (1, -1)\ e\ (-1, 1).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 21 (Febbraio 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^2$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1, 1),\ (-1, 1)\ e\ (-1, -1).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 22 (Aprile 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2y^2 - x^2 + 2xy + 2x$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1,0),\ (1,1)\ \text{e}\ (1,-1).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 23 (Aprile 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2y^2 - 2xy$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1,1),\ (-1,1)\ \text{e}\ (1,0).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 24 (Giugno 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 + xy - y^2\,.$$

La funzione F *ha esattamente due punti critici in* $\mathbb{R}^2$ *:* $A_0 = (0,0)$ *e* $A_1 = (x_1, y_1)$.

(a) *Calcolare la matrice Hessiana* $H = \nabla^2 F$ *di* F *in* A_0.

(b) *Dire se la matrice Hessiana* $\nabla^2 F(A_0)$ *è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(c) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto* A_0, *usando il risultato del punto precedente?*

(d) *Trovare le coordinate* (x_1, y_1) *del punto critico* A_1.

(e) *Calcolare la matrice Hessiana* $H = \nabla^2 F$ *di* F *in* A_1.

(f) *Dire se la matrice Hessiana* $\nabla^2 F(A_1)$ *è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(g) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto* A_1, *usando il risultato del punto precedente?*

Esercizio 25 (Giugno 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^4 + x^2y - y^3\,.$$

La funzione F ha esattamente tre punti critici in $\mathbb{R}^2$:

$$A_0 = (0,0)\ ,\quad A_1 = (x_1,y_1) \quad e \quad A_2 = (x_2,y_2).$$

(a) *Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2.*

(c) *Per ciascuna delle metrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punti A_1 e A_2, usando il risultato del punto precedente?*

Esercizio 26 (Luglio 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y - y^2x + 3x^2\,.$$

La funzione F ha esattamente due punti critici in $\mathbb{R}^2$: $A_1 = (x_1,y_1)$ e $A_2 = (x_2,y_2)$.

(a) *Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2.*

(c) *Per ciascuna delle matrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punti A_1 e A_2, usando il risultato del punto precedente?*

Esercizio 27 (Settembre 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y^2 - 2y^2x + x\,.$$

La funzione F ha esattamente due punti critici in $\mathbb{R}^2$: $A_1 = (x_1,y_1)$ e $A_2 = (x_2,y_2)$.

(a) *Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2.*

(c) *Per ciascuna delle matrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nei punti A_1 e A_2 usando il risultato del punto precedente?*

Altri esercizi sulle matrici hessiane

Esercizio 28. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Scrivere il gradiente e la matrice hessiana della funzione F^2. Quali tra le affermazioni seguenti sono vere?*

(a) Se $F(0,0) = 0$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.

(b) Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.

(c) Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.

(d) Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.

(e) Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.

(f) Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.

Esercizio 29. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Scrivere il gradiente e la matrice hessiana della funzione e^F. Quali tra le affermazioni seguenti sono vere?*

(a) *Se $F(0,0) = 0$, allora la matrice hessiana di e^F è semi-definita positiva.*

(b) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice hessiana di e^F è semi-definita positiva.*

(c) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, allora la matrice hessiana di e^F è semi-definita positiva.*

(d) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice hessiana di e^F è semi-definita positiva.*

(e) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice hessiana di e^F è semi-definita positiva.*

(f) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice hessiana di e^F è semi-definita positiva.*

(g) *Se $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice hessiana di e^F è definita positiva.*

(h) *Se $\nabla F(0,0) = (0,0)$ e $D^2F(0,0) \geq 0$, allora la matrice hessiana di e^F è definita positiva.*

(i) *Se $D^2F(0,0) > 0$, allora la matrice hessiana di e^F è definita positiva.*

Esercizio 30. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione*

$$F(x, y) = f(x)f(y)$$

Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione F. Quali tra le affermazioni seguenti sono vere?

(a) *Se $f(0) = 0$, allora $\nabla F(0,0) = 0$.*

(b) *Se $f'(0) = 0$, allora $\nabla F(0,0) = 0$.*

(c) *Se $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, allora la matrice hessiana di F è definita positiva.*

(d) *Se $f(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, allora la matrice hessiana di F è definita positiva.*

(e) *Se $f(0) > 0$ e $f''(0) > 0$, allora la matrice hessiana di F è definita positiva.*

Esercizio 31. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione*

$$F(x, y) = f(xy)$$

Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione F.

Esercizio 32. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione*

$$F(x, y) = xf(y)$$

Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione F.